Lösungen Lambacher Schweizer - Seite 116ff

Die Lösungen sind ohne Gewähr, da ich mich auch gelegentlich verrechne.

Seite 116

4 Gesucht sind mögliche Werte für c, so dass die gegebenen Punkte auf der Kugel, innerhalb der Kugel bzw. außerhalb der Kugel liegen. Der Mittelpunkt M hat die Koordinaten $(2 \mid -3 \mid 1)$ und $r = 5\sqrt{2}$. Damit ist die Kugelgleichung mit $(\vec{X} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix})^2 = 50$ bzw $(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2 + (x_3 - 1)^2 = 50$ gegeben. Bei der ersten Teilaufgabe werde ich noch viel dazu schreiben, damit man die einzelnen Schritte nachvollziehen kann.

(a) Wir prüfen die Lage des Punktes $P(3 \mid 4 \mid c)$:
Dazu nehmen wir den Ortsvektor des Punktes und setzen ihn in die linke Seite der Kugelgleichung ein. Wenn sich der Wert 50 ergibt, dann liegt P auf der Kugel, bei einem Wert kleiner 50 liegt P innerhalb der Kugel, ansonsten außerhalb.
$(3 - 2)^2 + (4 + 3)^2 + (c - 1)^2 = 1^2 + 49 + (c - 1)^2 = 50 + (c - 1)^2$
Der obige Term ergibt nur dann 50, wenn $(c - 1)^2 = 0$ ist. Das ist nur für $c = 1$ der Fall. Also liegt P nur für $c = 1$ auf der Kugel.
Da $(c - 1)^2$ für $c \neq 1$ immer positiv ist, liegt P für alle $c \neq 1$ außerhalb der Kugel und niemals innerhalb der Kugel.

(b) $P(2 \mid c \mid 6)$: $(2 - 2)^2 + (c + 3)^2 + (6 - 1)^2 = (c + 3)^2 + 25$
Wann ist nun dieser Term gleich 50? Wir verwenden die passende Gleichung:
$(c + 3)^3 + 25 = 50 \Rightarrow (c + 3)^2 = 25$ (*)
Die obige Gleichung hat zwei Lösungen, da sowohl 5 und -5 quadriert 25 ergeben.
$c_1 + 3 = 5 \Rightarrow c_1 = 2$ und $c_2 + 3 = -5 \Rightarrow c_2 = -8$
Damit liegt P für $c = 2$ und für $c = -8$ auf der Kugel.
Jetzt müssen wir prüfen, was für $c < -8$, $-8 < c < 2$ und für $c > 2$ gilt. Gleichung (*) zeigt, dass für $c < -8$ gilt: $(c + 3)^2 > 25$ und damit liegt P außerhalb der Kugel für $c < -8$.
Für $-8 < c < 2$ ist $(c + 3)^< 25$ und damit liegt P innerhalb der Kugel für $c \in] - 8; 2[$.
Für $c > 2$ ist $(c + 3)^2 > 25$ und P liegt wieder außerhalb der Kugel.
Zusammenfassung:

- für $c < -8$ oder $c > 2$ liegt P außerhalb der Kugel.
- für $c = -8$ oder $c = 2$ liegt P auf der Kugel.
- für $-8 < c < 2$ liegt P innerhalb der Kugel.

(c) $P(c \mid c \mid 6)$: $(c-2)^2 + (c+3)^2 + (6-1)^2 = c^2 - 4c + 4 + c^2 + 6c + 9 + 25 = 2c^2 + 2c + 38$ ergibt 50, wenn $c^2 + c + 19 - 25 = 0$ und damit $c^2 + c - 6 = 0$ ergibt. Mit Vieta folgt $c^2 + c - 6 = (c + 3)(c - 2) = 0$ genau dann, wenn c entweder -3 oder 2 ist. Auch hier sind nun die einzelnen Teilintervalle zu untersuchen (...) und es folgt:
Für $c = -3$ oder $c = 2$ liegt P auf der Kugel, für $-3 < c < 2$ liegt P innerhalb der Kugel, und für $c < -3$ oder $c > 2$ liegt P außerhalb der Kugel.

5 Gesucht sind die Gleichunger der Kreise, für die gilt: Der Radius der Kreise ist mit $r = 4\sqrt{2}$ gegeben. Die Mittelpunkte $M(m_1 \mid m_2)$ der Kreise liegen auf der Geraden mit der Gleichung $x_1 - x_2 = 0$, also muss gelten: $m_1 = m_2$. Der Punkt P soll auf dem Kreis liegen.

(a) $P(0 \mid 0)$. Es gilt $(m_1 - 0)^2 + (m_1 - 0)^2 = 32$
$\Rightarrow 2m_1^2 = 32$, also $m_1 = \pm 4$
Die geforderten Eigenschaften gelten für die beiden Kreise $K_1: \ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 = 32$ und $K_2: \ (x_1 + 4)^2 + (x_2 + 4)^2 = 32$
Hier kann man sich sehr schön überlegen, wie die Kreise im Koordinatensystem liegen müssen!
Ich empfehle Zuhause die Kreisgleichungen in geogebra einzugeben und sich die MÃűglichkeit nicht entgehen zu lassen die eigene LÃűsung mit der Darstellung dort zu verleichen.

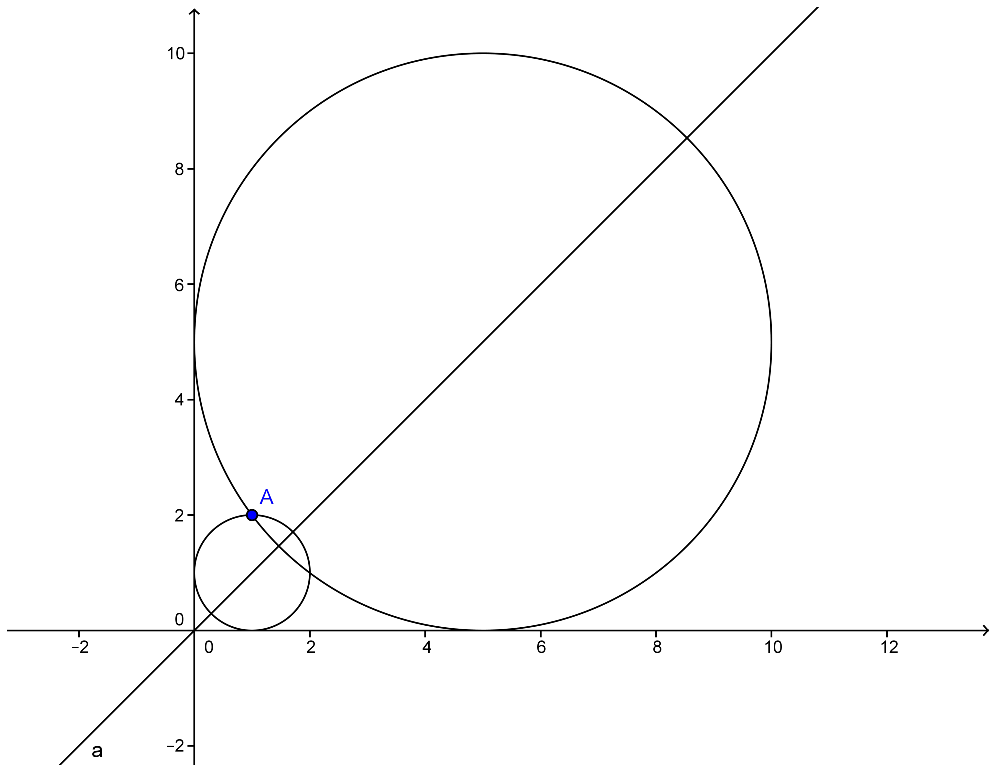
(b) $P(-7 \mid 1)$. Hier wird wie oben argumentiert.
$(-7 - m_1)^2 + (1 - m_1)^2 = 32$
$49 + 14m_1 + m_1^2 + 1 - 2m_1 + m_1^2 = 32$
$50 + 12m_1 + 2m_1^2 = 32$ durch 2 dividieren, dann 16 subtrahieren
$m_1^2 + 6m_1 + 9 = 0 \Rightarrow (m_1 + 3)^2 = 0$, also ist $m_1 = -3$.
Die gesuchte Kreisgleichung ist $K: \ (x_1 + 3)^2 + (x_2 + 3)^2 = 32$
Einen zweiten Kreis mit genau diesen Eigenschaften gibt es nicht.

6 Gesucht ist die Gleichung des Kreises mit den Durchmesserendpunkten $A(-3 \mid -1)$ und $B(5 \mid 5)$ in Vektor- und Koordinatendarstellung.
Hier sind wir in $\mathbb{R}^2$, also genügen die genannten Eigenschaften, um den Kreis eindeutig festzulegen.
Den Durchmesser und damit den Radius des Kreises berechnet man, indem man den Betrag des Vektors $\vec{AB}$ bestimmt. Bitte selber machen. Es ergibt sich $K: \ (\vec{X} - \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix})^2 = 25$
bzw $(x_1 - 12)^2 + (x_2 - 9)^2 = 25$

7 Die eine Gleichung beschreibt einen Kreis in $\mathbb{R}^2$, die andere eine Kugel in $\mathbb{R}^3$, dessen Schnittmenge mit der x_1x_2-Ebene der Kreis ist.

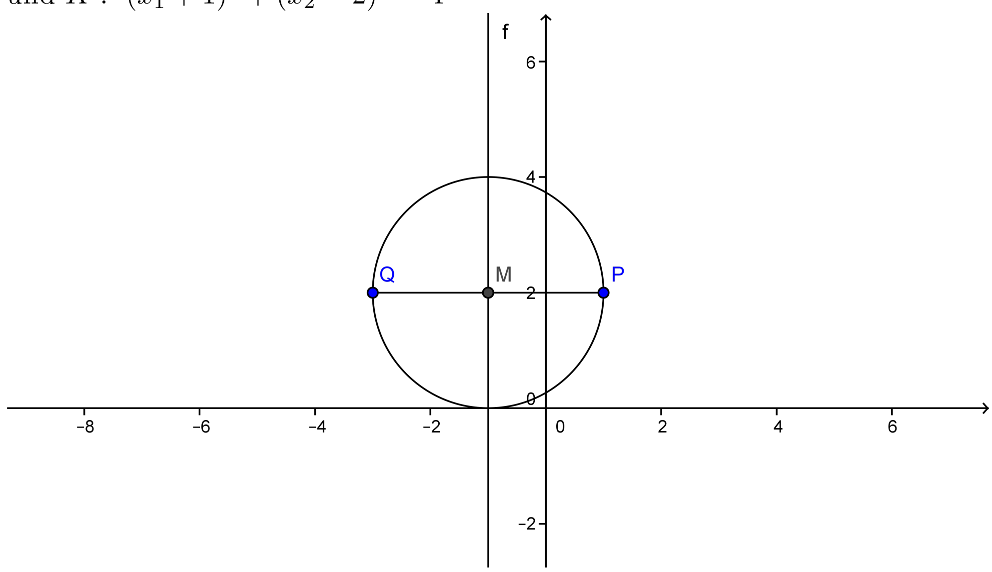
8 (a) Für a) ist ein Kreis gesucht, der beide Koordinatenachsen berührt und durch den Punkt $(1 \mid 2)$ geht. Diese Aufgabe kann man auf Aufgabe 5 zurückführen. Hier ist zwar der Radius r des Kreises nicht gegeben, dafür hat man genügend Zusammenhänge, die zu Gleichungen führen, mit denen man alle Unbekannten berechnen kann.

Unter anderem muss der Mittelpunkt auf der Geraden $x_2 = x_1$ liegen. Der Kreis geht durch die Berührpunkte mit den Achsen und diese haben die Koordinaten $(r \mid 0)$ und $(0 \mid r)$.



Mit obigen Überlegungen ergibt sich folgende Gleichung (m_1 muss gleich r sein)
$(1-m_1)^2+(2-m_1)^2=m_1^2 \Rightarrow 1-2m_1+m_1^2+4-4m_1^2+m_1^2=m_1^2$
$5-6m_1+m_1^2=0$, nach Vieta folgt $(m_1-1)(m_1-5)=0$.
Damit ergeben sich sogar die folgenden beiden Kreisgleichungen:
$K_1:(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=1$ und $K_2:(x_1-5)^2+(x_2-5)^2=25$

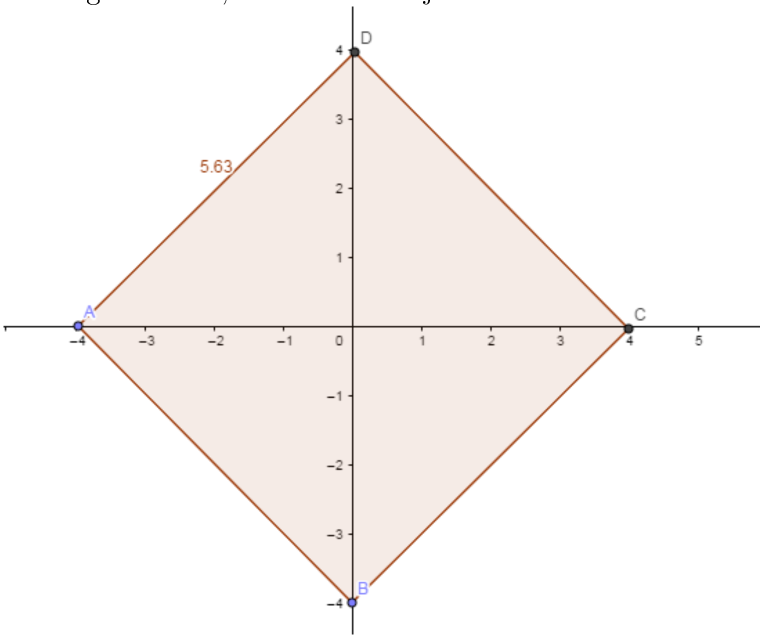
(b) Die x_1-Achse soll berührt werden und die Punkte $P(1 \mid 2)$ und $Q(-3 \mid 2)$ sollen auf dem Kreis liegen. Der Vektor $\vec{QP}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ verbindet beide Punkte. Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der Mittelsenkrechten zu diesem Vektor. Damit ist die x_1-Koordinate des Mittelpunkts -1. Beide Punkte haben die x_2-Koordinate 2, also muss der Mittelpunkt des Kreises der Mittelpunkt der Strecke $[QP]$ sein, also $M(-1 \mid 2)$ und $K:\ (x_1+1)^2+(x_2-2)^2=4$



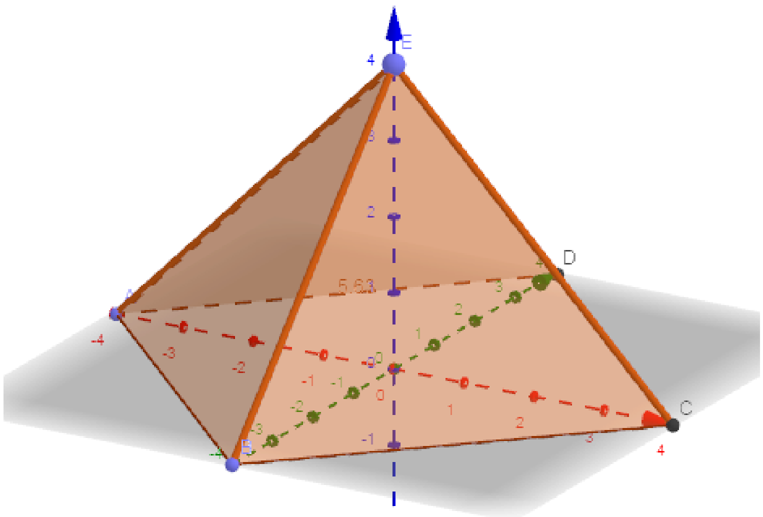
Natürlich kann man diese Teilaufgabe auch einfach rechnerisch lösen, indem man beide

Punkte in die Kreisgleichung einsetzt. Es ergeben sich zwei Gleichungen, $(1-m_1)^2 + (2-m_2)^2 = r^2$ und $(-3-m_1)^2 + (2-m_2)^2 = r^2$, die voneinander subtrahiert werden können. Damit ergibt sich als Gleichung $(1-m_1)^2 - (-3-m_1)^2 = 0$.
$\Rightarrow 1 - 2m_1 + m_1^2 - (9 + 6m_1 + m_1^2) = 0$, also $-8 - 8m_1 = 0$ und $m_1 = -1$
Da der Kreis die x_1-Achse berührt, muss $m_2 = r$ gelten. Damit kann man dann sehr schÃűn die Kreisgleichung bestimmen.

16 Die Kantenlänge ist $4\sqrt{2}$, also liegen die Eckpunkte des Oktaeders bei den Koordinaten $(0 \mid 4 \mid 0)$, $(0 \mid -4 \mid 0)$, $(4 \mid 0 \mid 0)$, $(-4 \mid 0 \mid 0)$ und $(0 \mid 0 \mid 4)$ und $(0 \mid 0 \mid -4)$. Betrachtet das folgende Bild, das ist die Projektion des Oktaeders auf die x_1x_2-Achse.



Die Kantenlängen sind $4\sqrt{2}$, damit gilt Grundfläche $= (4\sqrt{2})^2 = 32$. Insgesamt ergibt ich für das Volumen $\frac{2}{3} \cdot 32 \cdot 4 = 85\frac{1}{3}$.
Das folgende Bild zeigt den halben Oktaeder (die Achsen sind ein wenig gedreht).



Die zugehörige Kugelgleichung ist dann $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16$