Lösungen Lambacher Schweizer - Seite 79ff

Die Lösungen sind ohne Gewähr, da ich mich auch gelegentlich verrechne.

Seite 79

14 Ganzrationale Funktionen der Form $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots$

(a) Gesucht ist der Term einer ganzrationalen Funktion 4. Grades, deren Graph achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse verläuft, durch den Punkt $A(0 \mid 2)$ geht und den Tiefpunkt $B(1 \mid 0)$ hat.
vierten Grades $\Rightarrow f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
achsensymmetrisch bzgl der y-Achse $\Rightarrow b = 0$ und $d = 0$
Damit ist $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ und wir haben nur noch drei Unbekannte
$A(0 \mid 2) \in G_f \Rightarrow e = 2$
$B(1 \mid 0) \in G_f \Rightarrow 0 = a + c + 2 \Rightarrow a = -c - 2$
Also können wir $f(x) = (-c-2)x^4 + cx^2 + 2$ schreiben.
Tiefpunkt $B(1 \mid 0)$
Wir müssen die erste Ableitung betrachten: $f'(x) = 4(-c-2)x^3 + 2cx$
$f'(1) = 0 \Rightarrow 0 = 4(-c-2) + 2c \Rightarrow 0 = -4c - 8 + 2c \Rightarrow c = -4$
Da $a = -c - 2$ gilt, ist $a = 2$
Damit ist $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$
Alternativ hätte man hier gleich ein lineares Gleichungssystem aufstellen und lösen können.

(b) Gesucht ist der Funktionsterm einer ungeraden ganzrationalen Funktion vom Grad 3 mit Terrassenpunkt in $(0 \mid 0)$.
Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Eine ungerade Funktion ist eine Funktion, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist. $\Rightarrow b = d = 0$ und $f(x) = ax^3 + cx$
Terrassenpunkt $(0 \mid 0)$:
Also muss die erste Ableitung $f'(x) = 3ax^2 + c$ für $x = 0$ den Funktionswert 0 haben.
Also muss auch c gleich 0 sein.
Damit die Funktion im Ursprung einen Terrassenpunkt hat, darf sie ihr Monotonieverhalten dort nicht ändern. Das gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$, da 0 eine doppelte Nullstelle der ersten Ableitung ist.

Seite 83

4 Untersuchen einer Funktion, so dass der Graph skizziert werden kann. Danach ersten Schritt des Newton-Verfahrens durchführen.

(a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{7}{3}$; $x_0 = 1$
Grenzwerte: für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$
Schnittpunkt mit der y-Achse bei $x = -\frac{7}{3}$
für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to \infty$
Extremwerte: $f'(x) = x^2 + 2x$
Nullstellen von $f'(x)$ bei 0 und -2; beides sind einfache Nullstellen, also findet hier ein Vorzeichenwechsel statt. Damit befinden sich an diesen beiden Stellen ein Hoch- und ein Tiefpunkt.
Da der Graph von $f'(x)$ eine nach oben geöffnete Normalparabel ist, ist $f'(x)$ für $x < -2$ größer als 0, also steigt der Graph der Funktion $f(x)$ in diesem Bereich. Bei

-2 befindet sich damit ein Hochpunkt mit den Koordinaten $(-2 \mid -1)$ bei 0 befindet sich ein Tiefpunkt mit den Koordinaten $(0 \mid -\frac{7}{3})$. Da beide Werte negativ sind, muss die Nullstelle bei $x > 0$ sein. Der erste Startwert für das Newton-Verfahren muss größer als 0 sein, damit das Verfahren konvergiert.
Mit $x_0 = 1$ passt das.
Anhand dieser Informationen kann der Graph skizziert werden. Das Einzeichnen der Tangente im Punkt $(1 \mid -1)$ zeigt eine steigende Gerade, deren Schnittpunkt mit der x-Achse sehr nahe an der Nullstelle liegt. Die x-Koordinate des Schnittpunkts ist der nächste Näherungswert, $x_1 \approx 1,3$.
Rechnerische Überprüfung: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ und damit ergibt sich für $x_1 = 1 - \frac{-1}{3} = \frac{4}{3}$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x} + x^2 + 2$; $x_0 = -1$
Das ist eine gebrochen-rationale Funktion mit einer (einfachen) Definitionslücke bei $x = 0$ (Vorzeichenwechsel). Es gibt also keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.
Grenzwerte: für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to \infty$
für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to \infty$
...