Lösungen Lambacher Schweizer - Seite 72ff

Die Lösungen sind ohne Gewähr, da ich mich auch gelegentlich verrechne.

2 Bestimmen Sie die Stellen mit $f'(x) = 0$, um Kandidaten für Extremstellen zu gewinnen.

(a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x$
$4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3}$ oder $x_2 = -\sqrt{3}$

(b) $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{2}{x^2}$; $D_f = R\backslash\{0\}$
$\frac{1}{4}x - \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{4}x = \frac{2}{x^2}$
$\Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

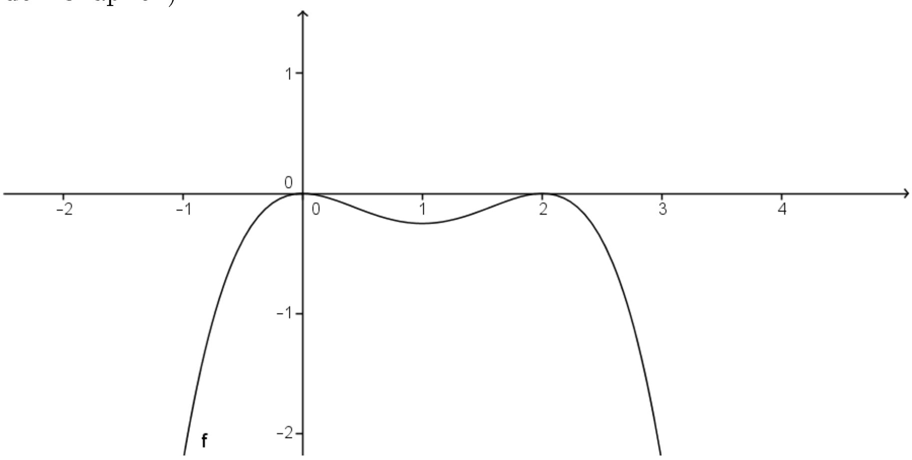
(c) $f(x) = -\frac{1}{10}x^5 + 8x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^4 + 8$
$\frac{1}{2}x^4 + 8 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^4 = -8$ besitzt keine Lösung.

(d) $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2-9} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x(x^2-9)-(2-x^2)2x}{(x^2-9)^2} = \frac{-2x(x^2-9+2-x^2)}{(x^2-9)^2} = \frac{-14x}{(x^2-9)^2}$
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

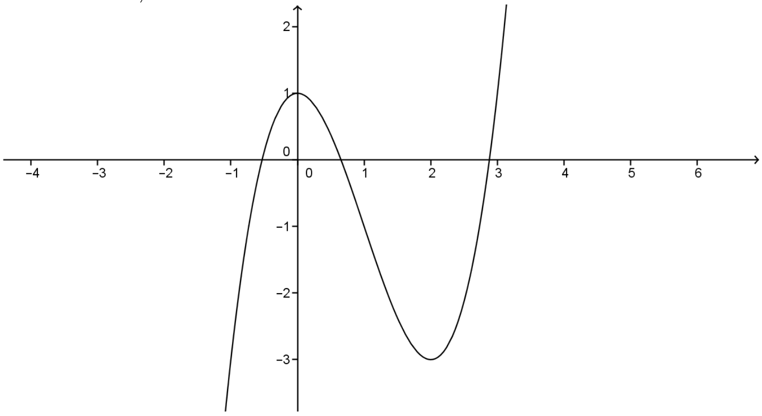
(e) Die übrigen Aufgaben sind ähnlich zu bearbeiten.

4 Gesucht sind die lokalen und globalen Extremwerte der Funktion f mit Skizze.

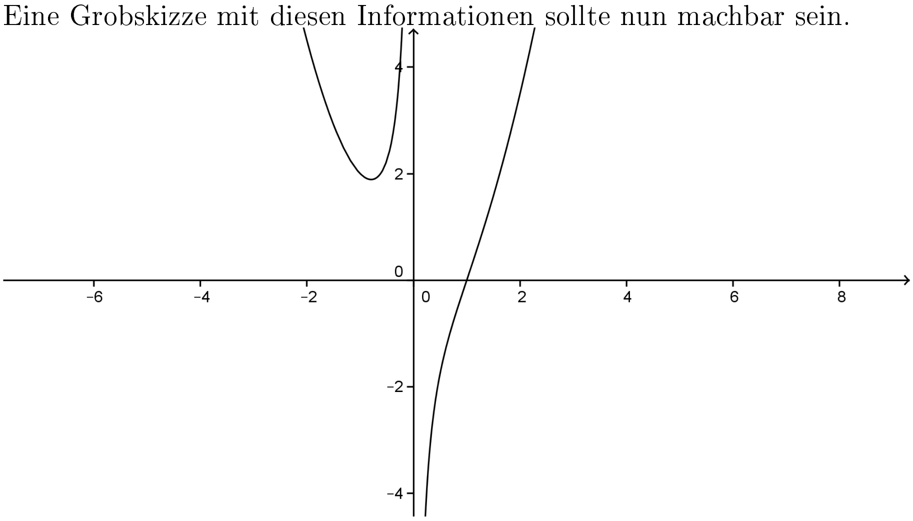
(a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$
Zur Bestimmung der Nullstellen der Ableitung $f'(x)$ wird der Funktionsterm in seine Linearfaktoren zerlegt:
$-x^3 + 3x^2 - 2x = -x(x^2 - 3x + 2) = -x(x-2)(x-1)$, also hat f' die Nullstellen $x_1 = 0$; $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$ (jeweils einfache Nullstellen, d.h. f' wechselt jeweils das Vorzeichen
Über eine Monotonietabelle können die Vorzeichen der Ableitungsfunktion und damit das Monotonieverhalten des Graphen von $f(x)$ in den einzelnen Bereichen bestimmt werden:
für $x < 0$ ist $f'(x)$ positiv, G_f steigt also in diesem Bereich. Bei jeder Nullstelle wechselt das Vorzeichen. Also ist bei $x = 0$ ein lokales Maximum mit $f(0) = 0$, bei $x = 1$ ein lokales Minimum mit $f(1) = -\frac{1}{4}$ und bei $x = 2$ ein lokales Maximum mit $f(2) = 0$. Da der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ jeweils $-\infty$ ist, existiert kein globales Minimum. Das globale Maximum wird bei $x = 0$ und bei $x = 2$ angenommen.
Für die Skizze sind die Grenzwerte und die Nullstellen von $f(x)$ interessant. An den Stellen 0 und 2 ist jeweils eine doppelte Nullstelle (also kein Vorzeichenwechsel für den Graphen).



(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, also hat die Ableitungsfunktion bei $x = 0$ und bei $x = 2$ jeweils eine einfache Nullstelle. Für $x < 0$ ist $f'(x) > 0$, G_f steigt also in diesem Bereich. Bei $x = 0$ erreicht der Graph den Extremwert $f(0) = 1$ (lokales Maximum), für $0 \leq x \leq 2$ ist $f'(x)$ negativ, der Graph ist dort streng monoton fallend. Bei $x = 2$ wird ein lokales Minimum mit $f(2) = -3$ erreicht, danach steigt der Graph. Damit gibt es weder ein globles Minimum noch ein globales Maximum, da $f(x)$ für $x \to -\infty$ beliebig klein wird $(-\infty)$ und für $x \to \infty$ beliebig groß wird. Im Punkt $(0 \mid 1)$ wird von G_f die y-Achse geschnitten. Der Funktionsgraph hat drei Nullstellen, die aber nicht so einfach zu bestimmen sind.

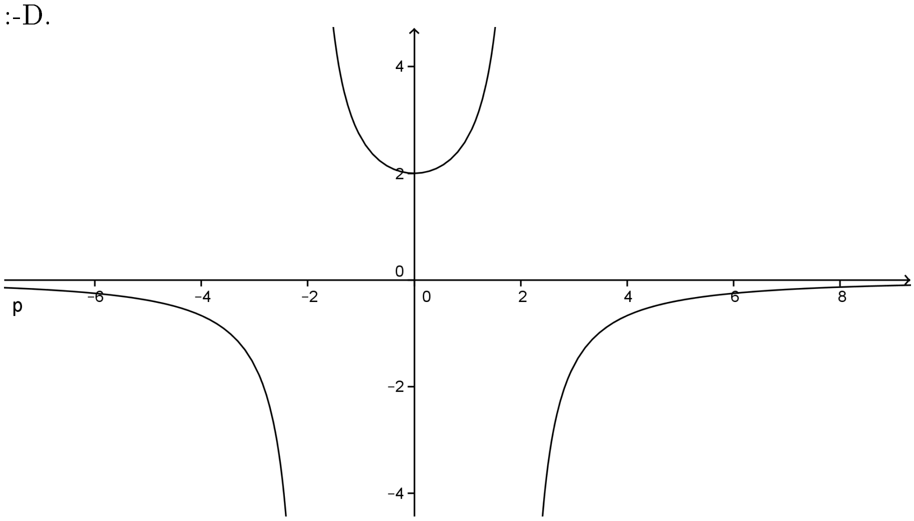


(c) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ mit $D_f = R\backslash\{0\} \Rightarrow f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{x^3-1}{x}$ hat bei $x = 0$ eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel und bei $x = 1$ eine Nullstelle.
$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$; einfache Nullstelle
Für $x < x_0$ ist $f'(x)$ negativ, da für $x \to -\infty$ die Werte unbeschränkt klein werden. G_f ist in diesem Bereich also streng monoton fallend. Bei $x = x_0$ wird ein lokales Minimum erreicht $(f(x_0) \approx 1,89)$. Danach steigt der Graph für $x \to 0$. Für $x > 0$ steigt der Graph wieder (Polstelle mit Vorzeichenwechsel!) ohne weitere Extremstellen. Es gibt weder ein globales Maximum noch ein globales Minimum.
Eine Grobskizze mit diesen Informationen sollte nun machbar sein.



(d) $f(x) = \frac{8}{4-x^2}$ hat zwei Polstellen bei $x_1 = -2$ und bei $x_2 = 2$ (jeweils mit Vorzeichenwechsel) und keine Nullstellen. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $(0 \mid 2)$. Die x-Achse ist für den Graphen von f die waagrechte Asymptote für $x \to \pm\infty$. Für $x < -2$ oder $x > 2$ ist $f(x) < 0$.
Die einzige Information, die uns nun fehlt, ist die Lage des lokalen Minimums, das in

dem Bereich $-2 < x < 2$ existieren muss.
$f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2}$ hat eine Nullstelle bei $x = 0$, dort ist unser gesuchtes lokales Minimum mit $f(0) = 2$.
Diese Information hätte man natürlich auch dadurch erhalten, dass der Graph von $f(x)$ achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse sein muss, da $f(-x) = f(x)$ gilt. Damit kann das lokale Minimum nur auf der y-Achse liegen. Jetzt ist die Skizze einfach :-D.



6 Gesucht sind Funktionsterme von Funktionen mit gewissen Eigenschaften.

(a) bei $x_1 = -1$ existiert ein lokales Maximum und bei $x_2 = 3$ ein lokales Minimum
$f'(x)$ muss dort seine Nullstellen haben, also ist ein erster Ansatz $f'(x) = (x+1)(x-3)$. Für $x < -1$ muss die Ableitungsfunktion negativ sein und zwischen -1 und 3 positiv sein, damit bei $x_1 = -1$ ein lokales Minimum existiert. Mit jeweils einfachen Nullstellen wechselt jeweils das Vorzeichen, also erfüllt unser $f'(x)$ die Vorgaben.
$f'(x) = x^2 - 2x - 3$ hat als Stammfunktion z.B. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$.

(b) bei $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$ existiert jeweils ein Minimum. Dazwischen könnte dann entweder ein lokales Maximum oder eine Polstelle existieren.
Ich wähle die erste Variante mit $f'(x) = (x+1)(x-3)x = x^3 - 2x^2 - 3x$ und $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$.

8 Zuordnung der Graphen G_g und G_f:
Die Funktion $g(x)$ hat zwei Polstellen, also muss auch deren Ableitung zwei Polstellen besitzen. Damit fallen G_1 und G_4 schon weg. Für $x < -2$ fällt G_g streng monoton, also muss die erste Ableitung dort negative Funktionswerte haben. Das trifft nur für G_2 zu.
Die Funktion $f(x)$ hat eine Definitionslücke (Polstelle) bei $x = 2$. Außerdem besitzt die Funktion ein lokales Maximum bei ca $x = 0,5$ und ein lokales Minimum bei $x \approx 3,5$. Dort müssen die Nullstellen der Ableitungsfunktion sein. Dies trifft nur auf G_4 zu.