Nullstellenberechnung

Achtung: Auch mir unterlaufen Fehler, die Lösungen sind also ohne Gewähr!
Teillösungen zum Arbeitsblatt

1. $f(x) = 2^{2-x} - 1$; $D_f = I\!R$
   Zum Bestimmen der Nullstelle wird der Funktionsterm gleich 0 gesetzt: $2^{2-x} - 1 = 0$
   Nach x auflösen, indem zuerst beide Seiten mit 1 addiert werden; die Potenz unter Anwendung der Potenzgesetze umformen:
   $\Rightarrow 2^2 \cdot 2^{-x} = 1$; hier kann man durch 2^{-x} dividieren bzw mit 2^x multiplizieren (das ist erlaubt, da dieser Term in jedem Fall ungleich 0 ist)
   $\Rightarrow 2^2 = 2^x$; da die Basis der beiden Potenzen gleich ist, müssen auch die beiden Exponenten gleich sein
   $\Rightarrow x = 2$ ist Lösung dieser Gleichung und damit die einzige Nullstelle

2. $f(x) = \log_{10}(4 - x^2)$ mit $D_f =]-2; 2[$
   Die Funktion ist nur in dem angegebenen Bereich definiert, da sich bei anderen Werten für x eine negative Zahl oder 0 ergibt; dafür ist die Logaritmusfunktion nicht definiert.
   $\log_{10}(4 - x^2) = 0$
   $10^0 = 4 - x^2$ folgt aus der Definition des Logarithmus
   $\Rightarrow 1 = 4 - x^2$; $| \quad +x^2 - 1$
   $\Rightarrow x^2 = 3$ und $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{3}$ sind die Nullstellen der Funktion (beide sind in der Definitionsmenge enthalten)

3. $f(x) = \frac{15-3x^2}{15+x^2}$ mit $D_f = I\!R$
   Um die Nullstellen dieser Funktion zu bestimmen, müssen nur die Nullstellen des Zählers betrachtet werden, da der Nenner nicht Null sein darf (hier ist er in jedem Fall größer als Null)
   $\Rightarrow 15 - 3x^2 = 0$; $| \quad +3x^2$
   $\Rightarrow 15 = 3x^2 \Rightarrow 5 = x^2 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{5}$ und $x_2 = \sqrt{5}$ sind die Nullstellen dieser Funktion.

4. Da diese Funktion schon in faktorisierter Form vorliegt, können die drei Nullstellen abgelesen werden: $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ und $x_3 = 3$ sind diese Nullstellen (Regel: ein Poduktwert ist Null, wenn einer der Faktoren 0 ist.

5. $f(x) = -3 + \log_{10}(x)$ mit $D_f = I\!R^+$
   Dieser Funktionsterm muss wieder gleich 0 gesetzt werden. Beim Auflösen nach x ergibt sich $\log_{10}(x) = 3$ und damit ist die Nullstelle bei $x = 10^3$.

6. Das ist leicht: für $x = 7$ wird der Zähler und damit der gesamte Bruch 0. Eine weitere Nullstelle gibt es nicht.

7. $f(x) = \frac{3^x-1}{3^x+1}$ mit $D_f = I\!R$
   Hier reicht es, den Zähler zu betrachten, da der Nenner sowieso nicht 0 sein darf und hier in jedem Fall größer als Null ist.
   $3^x - 1 = 0 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x = 0$, da nur 0 als Exponent zur Basis 3 den Wert 1 ergibt.

8. $f(x) = 0,2 \cdot (4^x - 2)$ mit $D_f = I\!R$
Dieser Funktionsterm ist schon faktorisiert. wir wissen (hoffentlich): ein Produkt ergibt 0, wenn einer der Faktoren 0 ergibt. Hier gibt es zwei Faktoren, einer ist mit dem Wert 0,2 auf jeden Fall ungleich 0, der andere Faktor ist der Term $(4^x - 2)$. Dieser ergibt 0, wenn $4^x = 2$ ist.
Das kan auch geschrieben werden als $(2^2)^x = 2$ und damit als $2^{2x} = 2^1$. Die Basis ist hier gleich, also müssen auch die Exponenten gleich sein, damit die Potenzwerte gleich sind.
$\Rightarrow 2x = 1$ und damit ist $x = \frac{1}{2}$ die einzige Nullstelle.

9. $f(x) = \log_5 \frac{2x}{x+1}$ mit $D_f = I\!R \backslash \{-1; 0\}$
Zu lösen ist $\log_5 \frac{2x}{x+1} = 0$.
Umgeschrieben (Definition des Logarithmus!) bedeutet das, dass $5^0 = \frac{2x}{x+1}$ gilt.
$\Rightarrow 1 = \frac{2x}{x+1}$; multipliziert mit $(x + 1)$ ergibt sich $x + 1 = 2x$. Damit ergibt sich $x = 1$ als Nullstelle.

10. $\log_2 \mid 0,25x \mid$ mit $D_f = I\!R \backslash \{0\}$
Die Betragsstriche sind hier nötig, da der Term $0,25x$ auch negativ sein könnte. Damit wäre der Logarithmusausdruck nicht definiert.
Zum Berechnen der Nullstelle wieder - wie immer - gleich Null setzen. $\log_2 \mid 0,25x \mid = 0$ bedeutet, dass $2^0 = \mid 0,25x \mid$ (Definition Logarithmus)
Um die Betragsstriche wegzulassen, müssen die beiden Fälle beachtet werden: wenn $x > 0$ ist, dann können die Betragsstriche einfach weggelassen. Wenn $x < 0$ ist, dann muss vor den Term $0,25x$ ein negatives Vorzeichen geschrieben werden, wenn die Betragsstriche weggelassen werden.
Zu lösen sind also die Gleichungen $1 = 0,25x$ für $x > 0$ und $1 = -0,25x$ für $x < 0$. Die erste Gleichung ergibt als Nullstelle $x = 4$, die zweite Gleichung ergibt als Lösung $x = -4$.

11. $f(x) = \sin(2\pi x)$ mit $D_f = [-1; 1]$
Gesucht sind alle Werte von x, so dass $\sin(2\pi x) = 0$ ist.
Da x laut Definitionsmenge zwischen -1 und 1 liegt (Grenzen jeweils eingeschlossen), ist $2\pi x$ zwischen -2π und 2π.
Als Nullstellen für die Sinusfunktion ergeben sich damit $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = 1$ und $x_4 = -\frac{1}{2}$; $x_4 = -1$, da dann der Term $2\pi x$ die gewünschten Werte 0; $\pm\pi$ und $\pm 2\pi$ hat.

12. $f(x) = 4^x - 8$ mit $D_f = I\!R$
$4^x - 8 = 0 \Rightarrow (2^2)^x = 2^3 \Rightarrow 2^{2x} = 2^3 \Rightarrow 2x = 3$ und damit $x = 1,5$ (Exponentenvergleich)

13. $f(x) = 10^{-2x} - 2$ mit $D_f = I\!R$
$10^{-2x} - 2 = 0 \Rightarrow 10^{-2x} = 2$
Mit Exponentenvergleich sieht es hier schlecht aus, also logarithmieren wir die Gleichung.
$\log_{10}(10^{-2x}) = \log_{10}(2)$
$-2x = \log_{10}(2)$
$x = -\frac{1}{2} \log_{10}(2)$ ist die einzige Nullstelle

14. Beim Funktionsterm wurde x schon ausgeklammert, also ist $x = 0$ eine Nullstelle der Funktion. Um zu ermitteln, wann der Fator $x^2 + 3x - 10$ den Wert Null ergibt, kann die Mitternachtsformel oder Vieta verwendet werden. Dabei ergeben sich zwei weitere Nullstellen: 2 und -5

15. $(x) = \log_{10} 10^{3x-9}$ mit $D_f = \mathbb{R}$
    $\log_{10} 10^{3x-9} = 0$; hier kann ein Logarithmusgesetz angewendet werden
    $\Rightarrow (3x - 9)\log_{10} 10 = 0 \Rightarrow 3x - 9 = 0$
    $\Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3.$