Die Überschriften der vergangenen Kapitel liste ich hier auf, damit ihr seht, was wir schon alles gelernt haben.

1 Graphen gebrochen rationaler Funktionen

2 Lokales und globales Differenzieren

3 Anwendungen der Ableitung

4 Koordinatengeometrie im Raum

Mit den letzten Übungen beenden wir auch schon unseren Ausflug in die Koordinatengeometrie. Ich empfehle das Bearbeiten von Aufgaben am Ende des Kapitels (Üben und Wiederholen, Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur).

5 Weitere Ableitungsregeln

5.1 Ableiten der Sinus- und Kosinusfunktion

Übertragt bitte die Überschriften und die folgenden Ableitungsregeln als Hefteintrag in euer Heft.

In einem der vorigen Kapitel haben wir uns erste Gedanken zu der Ableitung einer trigonometrischen Funktion gemacht. Wir haben festgestellt, dass die Steigung der Tangenten ebenfalls periodisch sein muss. In diesem Kapitel lernen wir die Ableitungsregeln für die Sinus- und Kosinusfunktion. Lest bitte die einleitende Seite 126 im Buch. Ähnliche Überlegungen haben wir schon einmal durchgeführt.

Wem das viele Lesen schwerfällt, der kann gerne auf dieses Video zurückgreifen:
`https://www.youtube.com/watch?v=6CfQLlgA3zE`

Satz
Für die Funktion $f : x \mapsto \sin x$ gilt: $f'(x) = \cos x$.
Für die Funktion $f : x \mapsto \cos x$ gilt: $f'(x) = -\sin x$.

Als Merkregel könnt ihr euch dieses Video anschauen, vielleicht bleiben die Zusammenhänge als Ohrwurm:
`https://www.youtube.com/watch?v=tSovvlCxUNs`

Zur Erinnerung: Bisher haben wir als Ableitungsregeln die Ableitung einer Potenzfunktion gelernt und einige Regeln, die es uns erlauben, zusammengesetzte Funktionen abzuleiten (Summenregel, Faktorregel, Produktregel und Quotientenregel). Wer diese Regeln nicht mehr im Kopf hat, schlägt bitte bei den entsprechenden Hefteinträgen nach. Bei unseren Übungen werden wir alle

Regeln und die Ableitungsregeln oben kombinieren. Es gibt immer noch Funktionen, die wir mit den oben genannten Regeln nicht ableiten können. Überlegt euch mal eine Funktion.

Folgende Übungen hätten wir im Unterricht dazu gemacht: Seite 127ff
Lest euch die Aufgaben in Beispiel 1 durch und bearbeitet in gleicher Weise mindestens fünf Teilaufgaben von Aufgabe 2. Als Lösung muss sich jeweils ein Wert ergeben, der auf dem Lösungssalat am rechten Rand zu finden ist. Für diese Aufgabe solltet ihr unbedingt die oben genannten Ableitungsregeln wiederholen, falls ihr sie nicht mehr parat habt. Die Lösungen hierzu findet ihr am Abend bei mebis (als `Wedel-1m54-17-03-20.pdf` oder auf der Homepage), damit ihr eine vernünftige Grundlage für die Barbeitung der Hausaufgaben habt.

Aufgabe 4: Diese Aufgabe hätten wir nur mündlich kurz angesprochen. Bitte kurz durchlesen, die Lösungsidee sollte euch klar sein. Bei Schwierigkeiten findet ihr sie auch auf dem Lösungsblatt `Wedel-1m54-17-03-20.pdf`, das ab Dienstag Abend (hoffentlich) bei mebis erhältlich ist (ansonsten auf der Homepage schauen).

Zur Veranschaulichung gehen wir auf Seite 128 und betrachten Aufgabe 6. Hier muss man bei einigen Funktionsgraphen schon ganz genau hinschauen. Diese Aufgabe bitte ebenfalls heute bearbeiten (Zeit: ca 15 Minuten, Rest Hausaufgabe).

Seite 129, Aufgabe 11 ist mal wieder etwas zum Rechnen. Hier ist die Gleichung der Tangente und der Normale an den Graphen von f im Punkt $P \in G_f$ gesucht.

a) $f(x) = \sin(x)$, $P(0\,|?)$
Hier muss nun zuerst die y-Koordinate von P berechnet werden. Dazu setzen wir $x = 0$ in die Funktionsgleichung ein und erhalten $\sin(0) = 0$.
$f'(x) = \cos(x)$ und $f'(0) = 1$. Damit ist die gesuchte Tangentengleichung $g : y = 1 \cdot x + t$, da 1 die Steigung der Tangente im Punkt P ist.
$P \in g \Rightarrow 0 = 1 \cdot 0 + t$, also ist auch $t = 0$. Die Tangentengleichung lautet $g(x) = x$ und die Normalengleichung lautet $h(x) = -x$. (Zur Erinnerung: Die Normale ist senkrecht zur Tangente und verläuft durch P; Geraden stehen aufeinander senkrecht, wenn das Produkt ihrer Steigungen -1 ergibt).

c) noch heute und

f) bitte ebenfalls als Hausaufgabe bearbeiten.

5.2 Die Umkehrfunktion

Wir wollen uns mit der Umkehrfunktion einer Funktion beschäftigen. Dabei interessieren uns einige Fragestellungen wie z.B. Was ist eine Umkehrfunktion genau? Gibt es immer eine Umkehrfunktion? Wie bestimmt man die Umkehrfunktion?

In der einleitenden Aufgabe im Buch Seite 130 sind einige grundlegende Beispiele dazu gegeben. Solche Fragestellungen kennen manche von euch aus der Information. Dort haben wir Beziehungen betrachtet und angeschaut, in welcher Richtung wir eine : 1-Beziehung haben.
Überlegt euch, bei welchen Zuordnungen die Umkehrung eindeutig ist: Lässt sich einer ISBN-Codierung eindeutig ein Titel zuordnen? Natürlich.

Aber schon bei der zweiten Zuordnung überlegen wir kurz: wir kennen die Note der Mathematikschulaufgabe. Können wir dann eindeutig sagen, wessen Schulaufgabe das ist?

Solche Zusammenhänge kennen wir. Funktionen sind per definitionem eindeutige Zuordnungen, d.h. für jeden x-Wert gibt es genau einen zugeordneten y-Wert. Wenn wir nun aber y mit x vertauschen, haben wir dann noch eine eindeutige Zuordnung, also eine Funktion?

Lest euch den Abschnitt nach Arbeitsauftrag 1 durch. Hier sind zwei verschiedene Funktionen gegeben. Deren Graphen sieht man ebenfalls eingezeichnet. Bei der einen Funktion ist die umgekehrte Zuordnung keine Funktion, bei der anderen dagegen schon.

Wir definieren mit den Zusammenhängen, die wir dort gesehen haben die im Buch zu findende Definition. Um auch etwas im Heft zu haben, **schreiben wir die Überschrift dieses Unterkapitels und die Definition von Seite 130 ins Heft**.

Beachtet bitte die Schreibweise einer Umkehrfunktion: Dieses $^{-1}$ finden wir auch auf dem Taschenrechner. Das haben wir dort schon oft verwendet. Wenn wir z.B. den Sinuswert eines Winkels gegeben hatten und den zugehörigen Winkel gesucht haben, dann haben wir auf dem Taschenrechner nach $\sin^{-1}$ gesucht. Sind nun also die Umkehrungen von trigonometrischen Funktionen Funktionen? Das können wir eindeutig verneinen, da wir - wie wir auch an den vorherigen Aufgaben gesehen haben - zu $\sin(x) = 0$ unendlich viele Werte für x gefunden haben, deren Sinuswert 0 ist ($\sin(0) = \sin(\pi) = \sin(2\pi) = ... = 0$). Unser Taschenrechner konnte uns nur einen dieser Werte liefern.

Lest bitte den Rest von Seite 30 durch. Wir stellen fest, dass das Zeichnen des Graphen der Umkehrfunktion sehr einfach ist, wenn wir den Graphen der Funktion schon gezeichnet haben. Alle Werte in der Wertetabelle tauschen ihre Plätze und damit spiegeln wir den Graphen der Funktion an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten und erhalten den Graphen der Umkehrfunktion. Erinnert ihr euch an die Exponentialfunktion und die Logarithmusfunktion? Dort haben wir ebenfalls diesen Zusammenhang feststellen können. Wertemenge und Definitionsmenge sind bei Funktion und Umkehrfunktion vertauscht.

Um also die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion zu bestimmen, wird $f(x)$ nach x aufgelöst und die Variablen werden vertauscht.

Beispiele:

1. $f(x) = 2x$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f = \mathbb{R}$
   Um $f^{-1}(x)$ zu bestimmen, lösen wir $y = 2x$ nach x auf: $x = \frac{1}{2}y$ und vertauschen x mit y. Wir erhalten für f^{-1} die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x$ und damit $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$ mit $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ und $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$. Übertragt dieses Beispiel in euer Heft, zeichnet ein Koordinatensystem und zeichnet die Graphen von f und f^{-1} in das Koordinatensystem. Zeichnet die Winkelhalbierende $y = x$ ebenfalls in das Koordinatensystem und überprüft, ob die Graphen wirklich symmetrisch bezüglich dieser Winkelhalbierenden sind (falls nicht, habt ihr einen Fehler gemacht).

2. $f(x) = 2^x$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f = \mathbb{R}^+$
   Hier gehen wir genauso vor. Wir lösen $y = 2^x$ nach x auf. Das gelingt uns mit dem in der 10.Klasse definiertem Logarithmus. Wir erhalten $x = \log_2(y)$. Wir vertauschen x und y und stellen fest, dass die Umkehrfunktion f^{-1} von f die Logarithmus-Funktion zur Basis 2 ist: $f^{-1}(x) = \log_2(x)$ mit $Df^{-1} = \mathbb{R}^+$ und $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$. Wir erinnern uns: die Exponentialfunktion liefert uns nur positive Werte ($2^x > 0$ für alle reellen Zahlen) und für die Logarithmusfunktion dürfen wir nur positive Werte einsetzen.

Wir stellen fest, dass es umkehrbare und nicht umkehrbare Funktionen gibt. Bei der Funktion $y = x^2$ scheitert das Auflösen nach x daran, dass wir sowohl negative als auch positive Werte beachten müssen, wenn wir als Definitionsmenge $\mathbb{R}$ festlegen. Eventuell lässt sich der Definitionsbereich aber so einschränken, dass die umgekehrte Zuordnung doch wieder eindeutig ist. Bei der Quadratfunktion ist das der Fall, wenn wir uns z.B. auf $\mathbb{R}^+$ beschränken. Streng monotone Funktionen haben die schöne Eigenschaft, dass sie ohne Probleme umkehrbar sind.

Auf der Grundlage dieser Überlegungen formulieren wir den Satz für die Umkehrbarkeit.
Bitte übertragt diesen Satz vom Buch S.131 in euer Heft.
Lest die darunter gegebenen Beispiele durch.

Versucht nun einige der folgenden Aufgaben von Seite 132 zu lösen. Mit Aufgabe 2 solltet ihr keine Probleme haben. Hier kann man sehr schön graphisch argumentieren. Wenn ihr hier noch nicht wisst, wie ihr argumentieren sollt, dann lest noch einmal den Abschnitt im Buch S.131 über dem Satz durch.

Aufgabe 3 lässt euch hoffentlich ahnen, dass viele der Betrachtungen an Funktionen, die wir früher vorgenommen haben, dazu führen, dass wir die Umkehrbarkeit einer Funktion mit Hilfe der Ableitung zeigen können. Wir erinnern uns, dass z.B. eine streng monoton steigende Funktion nur positive Steigungen haben kann. Versucht auch diese Aufgabe zu lösen.

Endgültige Hausaufgabe bis nächste Woche Dienstag, 24.03.: S. 128/6; S.129/11c und f; S.129/12; S.132/2;3