1 Graphen gebrochen rationaler Funktionen

siehe Extradatei

2 Lokales und globales Differenzieren

2.1 Differenzenquotient und mittlere Änderungsrate

2.2

2.3

2.4 Ableitungsfunktion

Beispiel: Geländewegen an einer Kratersohle, siehe Buch S.40

Zu einer Funktion f heißt die Funktion $f' : x \mapsto f'(x)$ die Ableitungsfunktion oder kurz die *Ableitung* von f.

Hier kommt noch das Beispiel S.43/Aufgabe 10 hin.

2.5 Stammfunktion

Bisher haben wir uns Funktionen angeschaut, bei denen wir die Ableitung mit Hilfe des Differentialquotienten bestimmt haben. Die Fragestellung, wie denn eine Funktion aussieht, deren Ableitungsfunktion gegeben ist, ist ebenfalls spannend. Siehe Zeichnungen S.45 oben: die Nullstellen der Ableitungsfunktion müssen sich bei der gesuchten Funktion als Punkte darstellen, bei denen die Tangente waagrecht zur x-Achse sind. Das Vorzeichen der Ableitungsfunktion verrät uns, in welchen Intervallen die gesuchte Funktion steigt (Tangenten mit einer positiven Steigung) oder fÃďllt (Tangenden mit einer waagrechten Steigung) Wir stellen aber auch fest, dass die Zuordnung einer Funktion zu einer gegebenen Ableitungsfunktion nicht eindeutig sein kann, da Graphen, die nach oben oder unten verschoben sind, ein exakt gleiches Verhalten bei den Tangentensteigungen vorweist. Natürlich muss auch die Definitionsmenge übereinstimmen.

Definition
Eine Funktion f heißt eine Stammfunktion der Funktion f, wenn f und F denselben Definitionsbereich besitzen und gilt: $F'(x) = f(x)$.

Weitere Beispiele siehe Buch.

2.6 Die Ableitung der Funktion $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$

Mit Hilfe des Differenzenquotienten und einiger Umformungen kann man für $n \in \mathbb{Z}$ folgenden Zusammenhang zeigen:

Satz: Die Funktion $f : x \mapsto x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ besitzt die Ableitung $f' : x \mapsto n \cdot x^{n-1}$.

1. Leiten Sie folgende Funktionen ab:
   (a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$
   (b) $f(x) = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3}$
   (c) $f(x) = \frac{1}{x^8} \Rightarrow f'(x) = -\frac{8}{x^9}$
   (d) $k \in \mathbb{Z}$: $f(x) = x^k \Rightarrow f'(x) = kx^{k-1}$
   Anmerkung: Dieser Zusammenhang gilt auch für $k = 0$, da dann $f'(x) = 0 \cdot x^{-1} = 0$ ist.
   (e) $n \in \mathbb{Z}$: $f(x) = x^{-n+5} \Rightarrow f'(x) = (-n + 5) \cdot x^{-n+4}$
   (f) $n \in \mathbb{Z}$: $f(x) = \frac{1}{x^{n-1}} \Rightarrow f'(x) = (1 - n)\frac{1}{x^{n-2}}$
2. Sind folgende Funktionen mit Hilfe der oben genannten Regel ableitbar? (kurze Begründung und Angabe der Ableitungsfunktion, falls möglich)
   (a) $f(x) = (x^2)^3$; $f(x) = x^6$ ist mit der Regel ableitbar, $f'(x) = 6x^5$

(b) $h(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ist mit der Regel nicht ableitbar, da $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

(c) $k(x) = (x^{\frac{1}{3}})^9 = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

(d) $s(a) = a^{3,5}$ ist nicht mit der Regel ableitbar, da $3,5 \notin \mathbb{Z}$

(e) $h(u) = (\frac{1}{u^{-5}})^{0,1} = (u^5)^{0,1} = u^{0,5}$ ist mit der Regel nicht ableitbar, da $0,5 \notin \mathbb{Z}$

(f) $a \in \mathbb{R}$: $g(x) = a^{0,2}$ ist eine konstante Funktion und damit $g'(x) = 0$

3. Bestimmen Sie für die Funktion f eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f, die die angegebene Steigung besitzt.

   (a) $f(x) = x^4$; $m = -4$
   $f'(x) = 4x^3 \Rightarrow 4x^3 = -4 \Rightarrow x^3 = -1 \Rightarrow x = -1$
   Ausserdem gilt $f(-1) = (-1)^4 = 1$
   Also hat die Tangente im Punkt $(-1 \mid 1)$ die Steigung -4.
   Tangentengleichung: $1 = -4 \cdot (-1) + t \Rightarrow t = -3$ und $y = -4x - 3$

   (b) $f(x) = \frac{1}{x^6} \Rightarrow f'(x) = -6x^{-7} \Rightarrow -6x^{-7} = 6 \Rightarrow x^{-7} = -1 \Rightarrow x^7 = -1 \Rightarrow x = -1$
   $f(-1) = 1$, also hat die Tangente im Punkt $(-1 \mid 1)$ die Steigung 6
   Tangentengleichung: $1 = 6 \cdot (-1) + t \Rightarrow t = 7$
   $y = 6x + 7$
   Die Funktion $f(x)$ hat übrigens bei $x = 0$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Es gilt also $D_f = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

4. Weisen Sie nach, dass der Graph der Ableitung der Funktion $f : x \mapsto x^5$ achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse ist.
   Begründung: $f'(x) = 5x^4$ und damit gilt $f'(-x) = 5(-x)^4 = 5x^4 = f(x)$. Also ist die Behauptung richtig.

5. Gegeben ist die Funktion $h : x \mapsto x^3$. Die Tangente an G_h in $B(1 \mid 1)$ schneidet G_h im Punkt P. Bestimmen Sie P.
   Lösungsmöglichkeit:
   $h'(x) = 3x^2$; $h'(1) = 3$, also hat die Tangente im Punkt B die Steigung 3.
   Tangentengleichung: $1 = 3 \cdot 1 + t \Rightarrow t = -2$, also $y = 3x - 2$
   Schnittpunkte mit G_h: $x^3 = 3x - 2 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$
   $x_1 = 1$ ist hier eine Lösung, da $1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$
   Mit Hilfe der Polynomdivision $(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2$ lassen sich die weiteren Lösungen bestimmen: $x_2 = -2$ und $x_3 = 1$
   Da $h(-2) = -8$ ist, hat der gesuchte Punkt die Koordinaten $(-2 \mid -8)$

2.7 Summenregel und Faktorregel

Auch folgende Ableitungsregeln lassen sich mit Hilfe des Differentialquotienten herleiten:

Satz: Sind die Funktionen g und h differenzierbar, so gilt:

Summenregel: $f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Faktorregel: $f(x) = c \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$

Beispiel: $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ lässt sich als Summe differenzierbarer Funktionen $f_1(x) = 3x^2$, $f_2(x) = -5x$ und $f_3(x) = 7$ schreiben, die wiederum jeweils als ein Produkt eines Faktors mit einer Potenzfunktion geschrieben werden können. Also gilt $f'(x) = 6x - 5$.

Also ergibt sich als direkte Folgerung für ganzrationale Funktionen folgender Satz:

Satz: Jede ganzrationale Funktion f vom Grad n ist differenzierbar und ihre Ableitung ist eine ganzrationale Funktion vom Grad $n - 1$.

Damit gilt natürlich auch, dass eine Stammfunktion einer ganzrationalen Funktion einen um 1 höheren Grad hat.
Beispiel: Für $f(x) = 4x^3 + 0,5x + 6$ ist $F(x) = x^4 + 0,25x^2 + 6x$ ist eine Stammfunktion von f, da $F'(x) = f(x)$ ist. Wie wir schon wissen, ist das nur eine von vielen. Weitere Stammfunktionen erhält man, indem man zu obigem $F(x)$ eine Konstante addiert: $F_1(x) = x^4 - 0,25x^2 + 6x + 4$ ist ebenfalls eine Stammfunktion von $f(x)$.

1. Bestimmen Sie die Ableitung:
   (a) $f(x) = 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2}$
   (b) $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 2x + \frac{2}{x^3}$
   (c) $h(u) = u^{-8} - 8u^3 \Rightarrow h'(u) = -8u^{-3} - 24u^2$

2. Berechnen Sie die Ableitungsfunktion f' und geben Sie die Werte $f'(0)$ und $f'(1)$ an. Steigt oder fällt der Graph von f an der Stelle $x = 0$?
   (a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 10x - 3$ mit $f'(0) = -3$ und $f'(1) = -1$. Der Graph von f fällt an der Stelle $x = 0$, da der Wert der Ableitung dort negativ ist.
   (b) $f(x) = \frac{2}{3}x^6 - 2x^5 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 5 \Rightarrow f'(x) = 4x^5 - 10x^4 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$ mit $f'(0) = 0$ und $f'(1) = -\frac{7}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{25}{6}$. Der Graph von f hat an der Stelle $x = 0$ eine waagrechte Tangente, steigt also weder noch fällt er.
   (c) $f(x) = ax^3 - 5x^5 - 1$ mit $a \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 - 25x^4$ mit $f'(0) = 0$ und $f'(1) = 3a - 25$. Auch hier hat der Graph von f an der Stelle$x = 0$ eine waagrechte Tangente.

3. Berechnen Sie jeweils die Steigung des Graphen von f in den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.

(a) $f(x) = 4x - x^3$ und damit $f'(x) = 4 - 3x^2$ (die Ableitungsfunktion ist übrigens achsensymmetrisch, da nur gerade Exponenten von x vorkommen)
Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:
x-Achse: $f(x) = 0 \Rightarrow 4x - x^3 = 0 \Rightarrow x(4 - x^2) = 0$
Schnittpunkte mit der x-Achse: $(0 \mid 0)$, $(2 \mid 0)$ und $(-2 \mid 0)$
$f'(0) = 4$, $f'(2) = -8$, $f'(-2) = 8$
Schnittpunkt mit der y-Achse (davon kann es nur einen geben, sonst hätten wir keine Funktion): $f(0) = 0$, siehe oben

(b) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 10x$
Schnittpunkte mit der x-Achse: $f(x)$ ist achsensymmetrisch
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ bei $x = 1$ und damit auch bei $x = -1$. Mit Hilfe einer Polynomdivision durch $(x2-^1)$ lässt sich eine quadratische Gleichung suchen, die die weiteren Nullstellen angibt. Es ergeben sich $x_3 = 2$ und $x_4 = -2$.
$\Rightarrow (-1 \mid 0), (1 \mid 0), (-2 \mid 0), (2 \mid 0)$
$f'(2) = 12$, $f'(-2) = -12$, $f'(-1) = 6$, $f'(1) = -6$ (hier reicht es, nur zwei Werte auszurechnen, da die Ableitungsfunktion punktsymmetrisch ist)
Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0 \mid 4)$

2.8 Produktregel und Quotientenregel

In diesem Unterkapitel betrachten wir Funktionen, die sich als Produkt oder Quotient anderen Funktionen schreiben lassen. Auch hier lässt sich aus dem Differentialquotienten eine passende Ableitungsformel herleiten:

Satz: Sind die Funktionen u und v differenzierbar, so gilt:

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Quotientenregel: Für alle x mit $v(x) \neq 0$ gilt: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiele:

1. Berechnen Sie die Ableitung auf zwei verschiedene Weisen mithilfe der Produktregel bzw durch Ausmultiplizieren.

   (a) $f(x) = (x^3 - 2x - 1)(x^2 + 3) = x^5 + 3x^3 - 2x^3 - 6x - x^2 - 3 = x^5 + x^3 - x^2 - 6x - 3$
   $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2x - 6$

Alternativ:
$u(x) = x^3 - 2x - 1 \Rightarrow u'(x) = 3x^2 - 2$
$v(x) = x^2 + 3 \Rightarrow v'(x) = 2x$
$f'(x) = (3x^2 - 2)(x^2 + 3) + (x^3 - 2x - 1)2x = 3x^4 + 9x^2 - 2x^2 - 6 + 2x^4 - 4x^2 - 2x = 5x^4 + 3x^2 - 2x - 6$

(b) $f(x) = (x - 1)(x + 3) = x^2 + 2x - 3$ und $f'(x) = 2x + 2$
Alternativ:
$u(x) = x - 1 \Rightarrow u'(x) = 1$
$v(x) = x + 3 \Rightarrow v'(x) = 1$
$f'(x) = 1 \cdot (x + 3) + (x - 1) \cdot 1 = 2x + 2$

2. Berechnen Sie die Ableitung:

(a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ mit $u(x) = x$, $u'(x) = 1$ und $v(x) = x + 1$, $v'(x) = 1$
$f'(x) = \frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

(b) $g(x) = \frac{2x}{1+3x}$ mit $u(x) = 2x$, $u'(x) = 2$ und $v(x) = 1 + 3x$, $v'(x) = 3$
$g'(x) = \frac{2\cdot(1+3x)-2x\cdot 3}{(1+3x)^2} = \frac{2}{(1+3x)^2}$

(c) $h(z) = \frac{4z^2-5}{2z+1}$ mit $u(x) = 4z^2 - 5$, $u'(x) = 8z$ und $v(x) = 2z + 1$, $v'(x) = 2$
$h'(z) = \frac{8z\cdot(2z+1)-(4z^2-5)\cdot 2}{(2z+1)^2} = \frac{16z^2+8z-8z^2+10}{(2z+1)^2} = \frac{8z(z+1)}{(2z+1)^2}$

3. Für einige Funktionen sind die Ableitungsfunktionen wie folgt vorgegeben:
$g(x) = \sqrt{2x} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$
$g(x) = \cos(2x - 1) \Rightarrow g'(x) = -2\sin(2x - 1)$
$g(x) = \sin\frac{x}{2} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$
$g(x) = \sqrt{1 + x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
Berechnen Sie unter Verwendung dieser Vorgaben und der Produktregel die Ableitungsfunktion f' zur Funktion f.

(a) $f(x) = x^2 \sin\frac{x}{2}$ mit $u(x) = x^2$, $u'(x) = 2x$ und $v(x) = \sin\frac{x}{2}$, $v'(x)$ siehe oben
$f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \cdot x^2 = 2x\sin\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\cos\frac{x}{2}$

(b) $f(x) = \sqrt{2x}(x^2 - x - 1)$ mit $u(x) = \sqrt{2x}$, $u'(x)$ siehe oben und $v(x) = x^2 - x - 1$, $v'(x) = 2x - 1$
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}(x^2 - x - 1) + \sqrt{2x}(2x - 1) = \frac{(x^2-x-1)\sqrt{2x}}{2x} + \sqrt{2x}(2x - 1) = \frac{(x^2-x-1)\sqrt{2x}+(4x^2-2x)\sqrt{2x}}{2x} = \frac{5x^2-3x-1)\sqrt{2x}}{2x}$

(c) $f(x) = \sqrt{2x^3 + 2x} = \sqrt{2x(x^2 + 1)} = \sqrt{2x} \cdot \sqrt{x^2 + 1}$ und mit Produktregel ableiten ergibt
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{2x}\cdot\sqrt{x^2+1}}{2x} + \frac{x\sqrt{2x}\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}$

(d) $f(x) = (\sin\frac{x}{2})^2 = \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}$ mit Produktregel ableiten ergibt
$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}$

(e) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 2x} = \sqrt{2x(x^2 - 2x + 1)} = (x-1)\sqrt{2x}$ mit Produktregel ableiten ergibt
$f'(x) = \sqrt{2x} + (x-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} = \sqrt{2x} + \frac{(x-1)\sqrt{2x}}{2x} = \frac{3}{2}\sqrt{2x} - \frac{\sqrt{2x}}{2x}$

4. Berechnen Sie die Ableitungsfunktion. Versuchen Sie, soweit möglich, ohne Quotientenregel auszukommen.

   (a) $f(x) = x - \frac{4x^2+1}{2x} = x - 2x - 0,5x^{-1} = -x - 0,5x^{-1}$
   $f'(x) = -1 + 0,5x^{-2}$

   (b) $f(x) = \frac{3x^2+3x}{x+1} = \frac{3x(x+1)}{x+1} = 3x$
   $f'(x) = 3$

   (c) $f(x) = \frac{4x^2+1}{2x-1}$ mit der Quotientenregel ableiten

   (d) $f(x) = \frac{3-4x^2}{x^3} = 3x^{-3} - 4x^{-1}$
   $f'(x) = -9x^{-4} + 4x^{-2}$

   (e) $f(x) = 2x^3 - \frac{x^2-1}{5} = 2x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$
   $f'(x) = 6x^2 - \frac{2}{5}x$

   (f) $f(x) = \frac{2x-3}{2x+3}$ mit Quotientenregel ableiten

5. Berechnen Sie die Ableitung:

   (a) $g(x) = (4x^3 - 2x)(x^2 + 2x - 3)$
   $g'(x) = (12x^2 - 2)(x^2 + 2x - 3) + (4x^3 - 2x)(2x + 2) = 12x^4 + 24x^3 - 36x^2 - 2x^2 - 4x + 6 + 8x^4 + 8x^3 - 4x^2 - 4x = 20x^4 + 32x^3 - 42x^2 - 8x + 6$

   (b) $f(x) = (x^2 - ax + 1)(x^2 - a)$
   $f'(x) = (x^2 - ax + 1)2x + (2x - a)(x^2 - a) = 2x^3 - 2ax^2 + 2x + 2x^3 - 2ax - ax^2 + a^2 = 4x^3 - 3ax^2 + 2x - 2ax$

   (c) $f(x) = \frac{3a}{1+x^2}$
   $f'(x) = \frac{-6ax}{(1+x^2)^2}$

   (d) $f(a) = \frac{3a}{1+x^2}$
   $f'(a) = \frac{3}{1+x^2}$

   (e) $f(x) = \frac{x^4}{x^4+4}$
   $f'(x) = \frac{4x^3(x^4+4) - x^4 \cdot 4x^3}{(x^4+4)^2} = \frac{4x^7 + 16x^3 - 4x^7}{(x^4+4)^2} = \frac{16x^3}{(x^4+4)^2}$

6. An welchen Stellen hat die Ableitung der Funktion f den Wert m?

   (a) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2x}$; $m = -\frac{1}{2}$
   $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^{-2}$
   Setze $f'(x) = m \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2}$
   $\Rightarrow 1 = \frac{3}{2}x^{-2} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$

(b) ähnlich

7. An welchen Stellen stimmen die Funktionswerte von f' und g überein? Was bedeutet das geometrisch? Zeichnen Sie die Graphen von f und g.

   (a) $f(x) = x^2$; $g(x) = -\frac{1}{x^2}$
   $f'(x) = 2x$; $f'(x) = g(x) \Rightarrow 2x = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow 2x^3 = -1 \Rightarrow x^3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -2^{-\frac{1}{3}}$

3 Anwendungen der Ableitung

3.1 Monotonie

Definition: Die Funktion f heißt **streng monoton zunehmend** in einem Intervall I des Definitionsbereichs, wenn **für alle** x_1, $x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Die Funktion f heißt **monoton zunehmend** in einem Intervall I des Definitionsbereichs, wenn **für alle** x_1, $x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

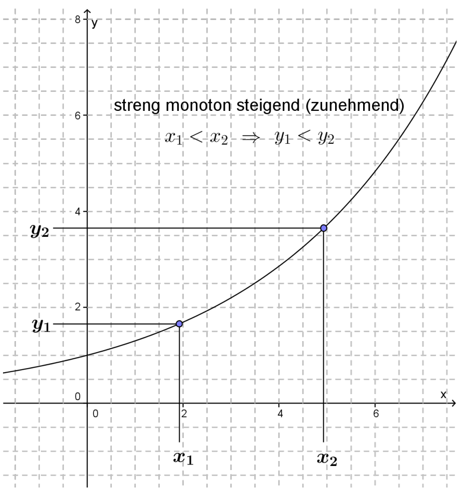
Die Funktion f heißt **streng monoton abnehmend** in einem Intervall I des Definitionsbereichs, wenn **für alle** x_1, $x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

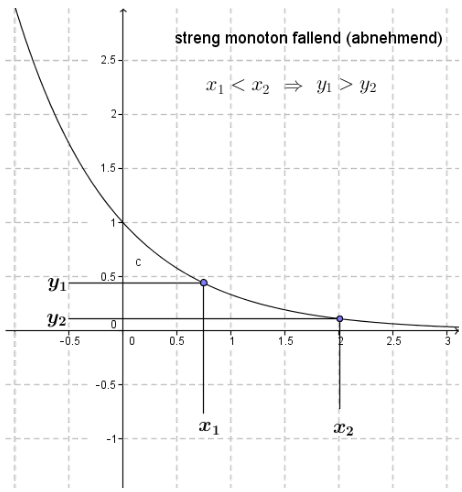
$$f(x_1) > f(x_2)$$

Die Funktion f heißt **monoton abnehmend** in einem Intervall I des Definitionsbereichs, wenn **für alle** x_1, $x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt:

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Mithilfe von passenden Ungleichungen kann für eine Funktion deren Monotonieverhalten überprüft werden.





Anmerkungen: Die größtmöglichen Intervalle, in denen eine Funktion jeweils streng monoton ist, nennt man Monotonieintervalle oder Monotoniebereiche.

Beispiele:

1. $f(x) = x^3$ mit $D_f = \mathbb{R}$ ist eine im ganzen Definitionsbereich streng monoton steigende Funktion.

2. $g(x) = \frac{1}{2^x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$ ist eine im ganzen Definitionsbereich streng monoton fallende Funktion.

3. $h(x) = x^2$ ist im Intervall $\mathbb{R}^-$ streng monoton abnehmend und im Intervall $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton zunehmend.

Aus dem Graphen einer Funktion kann man deren Monotoniebereiche ungefähr entnehmen. Sollte der Funktionsterm gegeben sein, dann kann mithilfe der Ableitung auf das Monotonieverhalten geschlossen werden. Dafür gibt es das folgende Monotoniekriterium:

Satz (Monotoniekriterium)
Die Funktion f sei im Interfall I differenzierbar.
Wenn für alle $x \in I$ gilt, dass $f'(x) > 0$ ist, dann ist f streng monoton zunehmend in I.
Wenn für alle $x \in I$ gilt, dass $f'(x) < 0$ ist, dann ist f streng monoton abnehmend in I.

Bemerkung: Die Rückrichtung dieses Satzes gilt nicht. Die oben im Beispiel schon genannte Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton zunehmend. Trotzdem gilt $f'(0) = 0$. Isolierte Stellen x_0 mit $f'(x_0) = 0$ stören die strenge Monotonie nicht. Randstellen kann man zu einem Monotonieintervall hinzunehmen, wenn im Inneren des Intervalls die nötige Bedingung für die entsprechende Monotonie erfüllt ist.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ mit $D_f = \mathbb{R}$
Bestimme die Ableitung und untersuche die Vorzeichen und die Nullstellen der Ableitung:
$f'(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, also hat die Ableitung die Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 1$
Untersuchung der Vorzeichen von f' und des Monotonieverhaltens von f:
Monotonietabelle

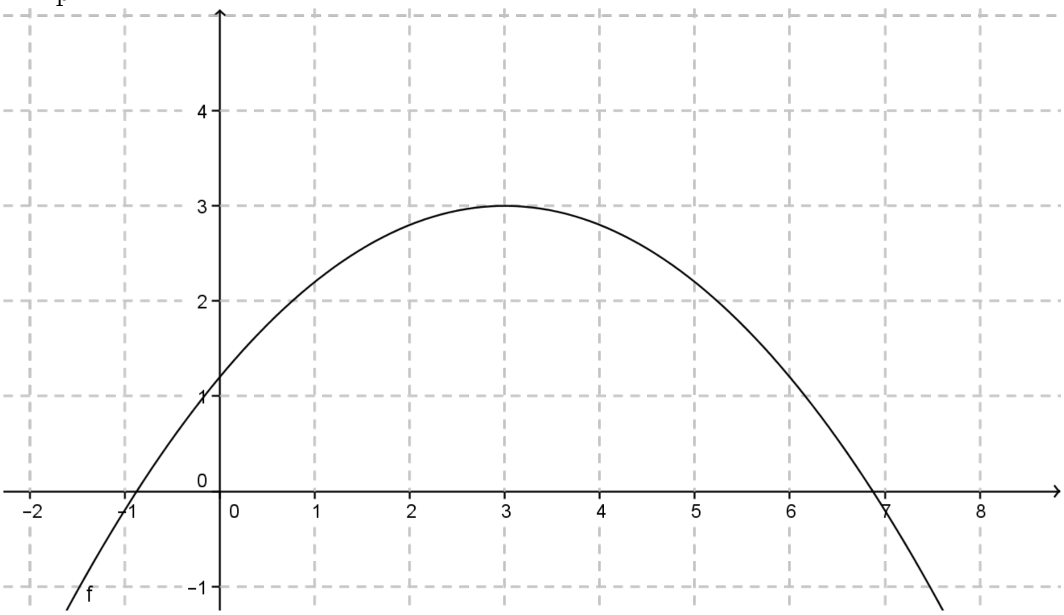
x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
G_f	$\nearrow$	lokales Maximum	$\searrow$	lokales Minimum	$\nearrow$
$f(x)$	sms	lokales Maximum	smf	lokales Minimum	sms

Für $x \leq -1$,d.h. im Intervall $]-\infty; -1]$ ist f also streng monoton zunehmend, im Intervall $[-1; 1]$ ist f streng monoton abnehmend und im Intervall $[1; \infty[$ ist f streng monoton zunehmend.

3.2 Extremstellen, Extremwerte

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, sollten wir einen Wert x_0 genauer untersuchen, für den die Ableitung 0 ist. Um festzustellen, ob es sich um einen kleinsten oder größten Funktionswert in einem begrenzten Intervall handelt, untersucht man die Umgebung von x_0. Als Umgebung von x_0, kurz $U(x_0)$ bezeichnet man ein offenes Intervall, das x_0 enthält und beliebig klein ist.

Beispiel:



Definition
Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt **lokales Maximum von** f, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so dass für alle Werte $x \in U(x_0)$ aus dem Definitionsbereich gilt:

$$f(x) \leq f(x_0)$$

Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt **lokales Minimum von** f, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so dass für alle Werte $x \in U(x_0)$ aus dem Definitionsbereich gilt:

$$f(x) \geq f(x_0)$$

Maxima und Minima werden auch **Extremwerte** und der zugehörige x-Wert **Extremstelle** genannt. Für einen Extremwert $f(x_0)$ heißt der Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$ auf dem Graphen **Extrempunkt**. Falls $f(x_0)$ ein lokales Minimum ist, dann heißt P_0 **Tiefpunkt**, falls $f(x_0)$ ein lokales Maximum ist, dann heißt P_0 **Hochpunkt.**

3.3 Bedingungen für Extrema

Eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für einen Extremwert ist die Eigenschaft, dass die erste Ableitung an der betreffenden Stelle den Wert 0 hat. Dies lässt sich wie folgt formulieren:

> **Satz**
> Ist die Funktion f auf einem Intervall $I =]a;b[$ differenzierbar und ist x_0 eine **innere Stelle** von I, d.h. $x_0 \in]a;b[$, dann gilt:
> Wenn f an der Stelle x_0 einen Extremwert hat, dann ist $f'(x) = 0$.

Die Rückrichtung des Satzes gilt nicht. Es gibt z.B. sogenannte Terrassenpunkte, bei denen die erste Ableitung 0 ist. Diese Terrassenpunkte sind keine Extremstellen. Auch an den Rändern eines Intervalls kann es Extremstellen geben, bei denen die erste Ableitung nicht 0 ist. Außerdem wird in obigem Satz die Differenzierbarkeit der Funktion in diesem Punkt gefordert. Eine Betragsfunktion wie z.B. $f(x) = \mid x - 2 \mid$ ist im Punkt $x_0 = 2$ nicht differenzierbar, hat dort aber ein globales Minimum.

Um Extremstellen zu identifizieren, wird die Umgebung innerhalb der Definitionsmenge einer möglichen Extremstelle betrachtet.
Bei einem lokalen Maximum an einer Stelle x_0 gilt in dieser Umgebung

- für $x < x_0$: $f'(x) > 0$, f ist also monoton steigend, und
- für $x > x_0$: $f'(x) < 0$, f ist also monoton fallend.

Dieses Verhalten von $f'(x)$ bezeichnet man als **Vorzeichenwechsel von + nach −**.

Bei einem lokalen Minimum an einer Stelle x_0 gilt in dieser Umgebung

- für $x < x_0$: $f'(x) < 0$, f ist also monoton fallend, und
- für $x > x_0$: $f'(x) > 0$, f ist also monoton steigend.

Dieses Verhalten von $f'(x)$ bezeichnet man als **Vorzeichenwechsel von − nach +**.

Keine Extremstelle, sondern **ein Terrassenpunkt** liegt an der Stelle $x = x_0$ vor, wenn die erste Ableitung in der Umgebung von x_0 sowohl bei $x > x_0$ und bei $x < x_0$ dasselbe Vorzeichen hat.

3.4 Untersuchungen rationaler Funktionen

Für eine Funktionsuntersuchung (Funktionsdiskussion) einer Funktion f werden folgende Aspekte betrachtet:

- Definitionsmenge: bei ganzrationalen Funktionen ist die maximale Definitionsmenge ganz $\mathbb{R}$, gebrochen rationale Funktionen müssen auf Definitionslücken (Nullstellen des Nenners) untersucht werden.

- Symmetrie: der Definitionsbereich muss symmetrisch um den Ursprung liegen. Für eine Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse muss für alle $x \in D_f$ der Zusammenhang $f(-x) = f(x)$ gelten. Für eine Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs muss für alle $x \in D_f$ gelten: $f(-x) = -f(x)$.
  (Anmerkung: Es gibt natürlich auch Symmetrieen bezüglich anderer Achsen und anderer Punkte, wenn die Funktion durch Verschiebung aus einer symmetrischen Funktion hervorgegangen ist.)

- Schnittpunkte mit den Achsen: mit der y-Achse kann es höchstens einen Schnittpunkt geben (sonst wäre f keine Funktion). Die Schnittpunkte mit der x-Achse heißen Nullstellen der Funktion. Die Vielfachheit der Nullstelle verrät, ob es an dieser Nullstelle einen Vorzeichenwechsel des Funktionswerts gibt.

- Verhalten an den Definitionslücken: hier untersucht man,ob eine behebbare Definitionslücke oder eine Polstelle vorliegt. Hierzu betrachtet man den links- und rechtsseitigen Grenzwert an der betreffenden Definitionslücke und ermittelt etwaige Asymptoten und mögliche Vorzeichenwechsel.

- Verhalten im Unendlichen: bei ganzrationalen Funktionen bestimmt der Summand mit dem größten Exponenten das Verhalten für betragsmäßig große Werte. Bei gebrochen rationalen Funktion betrachtet man den Grad des Nenner- und des Zählerpolynoms. Hier lassen sich waagrechte und schräge Asymptoten festlegen, falls solche vorhanden sind.

- Extremwerte und Monotonie: für diese Betrachtungen bestimmt man die erste Ableitung der Funktion, deren Nullstellen und das Verhalten in den Monotoniebereichen. Dadurch können Hoch-, Tief- und Terrassenpunkte ermittelt werden. Durch Vergleich der Funktionswerte lassen sich etwaig vorhandene (lokale und globale) Minima und Maxima gefunden werden. Bei diesen Betrachtungen dürfen die Ränder eines gegebenen Intervalls nicht vergessen werden.

Ziel dieser Untersuchungen ist es, den Graph der Funktion möglichst passend zeichnen zu können.

Beispiele:

3 Untersuchung auf Symmetrie, Bestimmen der Nullstellen, des Verhaltens an eventuell vorhandenen Definitionslückn und der Extrema; Skizze!

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$; $D_f = \mathbb{R}$
Symmetrie: $f(-x) = \frac{1}{2} \cdot (-x)^3 - 4 \cdot (-x)^2 + 8 \cdot (-x) = -\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - 8x \neq f(x)$, also nicht achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse. Auch $-f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - 8x$ entspricht nicht $f(-x)$: das Vorzeichen bei $4x^2$ ist unterschiedlich. Also ist sie auch nicht punktsymmetrisch.
Definitionslücken gibt es keine.
f ist differenzierbar (Polynomfunktion).
$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8$ hat die Nullstellen $x_1 = 0$ (einfach) und $x_2 = 4$ (doppelt).
Für $x < 0$ ist $f'(x) > 0$, für $x > 0$ ist $f'(x) < 0$ (Vorzeichenwechsel!) .
Bei $x < 4$ ergibt sich $f'(x) < 0$ und bei $x > 0$ gilt $f'(x) > 0$. Die entsprechenden x-Werte sind innere Punkte. Damit hat die Funktion bei $x = 0$ einen Hochpunkt (lokales Maximum) und bei $x = 4$ einen Tiefpunkt (lokales Maximum).
Jetzt sollte der Graph skizziert werden können.